

## نابرابریها و نامعادله‌ها

به نام خدا

درس امروز درباره نابرابری و نامعادله‌س.

فرض کنید دو تا توپ داریم، توپ شماره ۱ و توپ شماره ۲

آگه این دو تا توپ رو روی ترازو قرار بدیم که وزنهاشون رو با هم مقایسه کنیم، چند حالت ممکنه پیش بیاد؟

حالت اول: وزن توپ شماره ۱ و توپ شماره ۲ با هم برابرن :

وزن توپ شماره ۲ = وزن توپ شماره ۱

حالت دوم: وزن توپ شماره ۱ از توپ شماره ۲ بیشتره:

وزن توپ شماره ۲ > وزن توپ شماره ۱

حالت سوم: وزن توپ شماره ۱ از توپ شماره ۲ کمتره:

وزن توپ شماره ۲ < وزن توپ شماره ۱

آیا غیر از این سه حالت، حالت دیگه ای هم وجود داره؟ نه!

کلا وقتی داریم دو تا عدد ( یا هر چیز دیگه ای ) رو مقایسه می‌کنیم، فقط این ۳ حالت برای مقایسه‌شون امکانپذیره.

حالت اول تساوی و دو حالت بعدی نامساوی هستند.

نامساوی یعنی چی؟ یعنی با هم برابر نیستن و یکی از دیگری بزرگتره 😊

فرض کنید دو تا عدد حقیقی  $a$  و  $b$  رو با هم مقایسه کردیم و به این نتیجه رسیدیم که :

$$a > b$$

این معنیش چیه؟

وقتی می‌گیم  $a$  از  $b$  بزرگتره ، یعنی برای اینکه این دو عدد با هم برابر بشن باید به عدد حقیقی مثبت، به عدد کوچیکه یعنی  $b$  ، اضافه کنیم.

با عدد مثال میزنیم که واضح تر باشه.

همه ما می‌دونیم که :

$$18 > 12$$

اگه قرار باشه این نامساوی رو به مساوی تبدیل کنیم باید چکار کنیم؟

باید به اون عددی که کوچیکتره ، به عدد مثبت اضافه کنیم. اگه به  $12$  ،  $6$  تا اضافه کنیم نامساوی به تساوی تبدیل میشه:

$$18 = 12 + 6$$

به مطلب رو همینجا یاد بگیرد چون توی حل تمرینها به دردتون میفوره.

فرض کنید به تساوی داریم که به سمتش به عدد وجود داره و سمت دیگه دو تا عدد با هم جمع شدن ( مثل مثال بالا )

همیشه اون عددی که تنهاست، از دو عددی که با هم جمع شدن بزرگتره. مثلا در مثال

بالا ۱۸ هم از ۱۲ بزرگتره و هم از ۶.

فرض کنید این عبارت رو دارید:

$$a = b + 3$$

الان  $a$  چون تنهاست، هم از  $b$  بزرگتره و هم از ۳

فرض کنید عبارت زیر رو به ما دادن و گفتن که براش یه نابرابری بنویسیم:

$$a - 2 = b + 3$$

-۲ رو میاریم سمت راست تساوی:

$$a = b + 3 + 2$$

$$a = b + 5$$

حالا یه سمت تساوی  $a$  تنهاست و یه سمت تساوی دو تا عدد با هم جمع شدن، طبق مطلبی که گفتیم:

$$a > b$$

پس به طور کلی آگه همپین سوالایی بھتون دادن، یه طوری ساده کنید که یه طرف تساوی یه عدد باشه و طرف دیگه دو تا با هم جمع شده باشن. در اینصورت راحت می تونیم با هم مقایسه کنیم. مثل کاری که بالا انجام دادیم.  
یه مثال دیگه:

$$m + 1 = n + 3$$

می‌فوییم برای این عبارت نامساوی بنویسیم:

$$m = n + 3 - 1$$

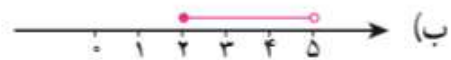
$$m = n + 2$$

بنابراین:

$$m > n$$

### کار در کلاس

۱- متناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.



می‌فوییم برای هر محور نابرابری بنویسیم. توجه داشته باشید که:

روی محور اعداد، هر پی به سمت راست حرکت می‌کنیم، اعداد بزرگتر میشن، بنابراین:

قسمت الف:

$$-3 \leq x \leq 5$$

قسمت ب:

$$2 \leq x < 5$$

۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر  $a+b > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هر دو مثبت‌اند.

ب) اگر  $ab > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هم علامت هستند.

ج) اگر  $\frac{ab}{c} < 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  و  $c$  منفی هستند.

د) اگر  $a^2b < 0$  آنگاه،  $b$  منفی است.

الف:

آیا آگه جمع دو تا عدد مثبت بشه، هر دو عدد مثبتن؟؟؟ یه کم فکر می‌کنیم ببینیم

می‌تونیم دو تا عدد پیدا کنیم که در این شرایط صدق نکنن؟

دو تا عدد  $-۳$  و  $+۱$  رو در نظر بگیرید:

$$+۱-۳ = +۵ > ۰$$

جمع این دو تا عدد مثبت میشه ولی هر دوی اونها مثبت نیستن، بنابراین، این

عبارت در حالت کلی صحیح نیست.

ب:

آیا آگه ضرب دو تا عدد مثبت بشه، اون دو عدد هتما هم علامتن؟ امتحان می‌کنیم:

مثبت = مثبت  $\times$  مثبت

منفی = منفی  $\times$  مثبت

مثبت = منفی  $\times$  منفی

می بینیم که فقط در حالتی که هر دو عدد هم علامت هستند جواب مثبت شده، بنابراین عبارت قسمت ب کاملاً صحیح هست.

ج: حاصل عبارت  $\frac{ab}{c}$  منفی شده، آیا  $a$  و  $b$  و  $c$  هتما منفی هستند؟؟

فرض می کنیم  $a$  مثبت و  $b$  مثبت و  $c$  منفی باشد، بینیم جواب چی میشه؟

$$\frac{\text{مثبت} \times \text{مثبت}}{\text{منفی}} = \frac{\text{مثبت}}{\text{منفی}} = \text{منفی}$$

باز هم جواب منفی شد، پس لزومی نداره که هتما هر سه تاییشون منفی باشن.

پس عبارت قسمت ج هم در حالت کلی درست نیست.

قسمت د: به ما گفته شده که  $a^2 b < 0$ ، ما می دونیم که هر عددی که به توان ۲ میرسه هتما مثبت میشه، پس  $a^2$  هتما مثبتته. پس به جای اون می نویسیم مثبت:

$$\text{منفی} = b \times \text{مثبت}$$

عدد  $b$  باید مثبت باشه یا منفی؟ امتحان می کنیم بینیم در کدوم حالت تساوی برقراره:

به جای  $b$  قرار میدیم مثبت:

$$\text{منفی} \neq \text{مثبت} \times \text{مثبت}$$

می بینیم که تساوی برقرار نیست.

حالا به جای  $b$  قرار میدیم منفی:

$$\text{منفی} = \text{منفی} \times \text{مثبت}$$

و میبینیم که تساوی برقراره. پس عبارت قسمت د صصیه.

فواص نابرابریها

نامساویها چند تا خاصیت دارن که هتما باید بهوشون توجه کنیم.

خاصیت ۱:

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند  $c$  جمع کنیم، نابرابری همچنان برقرار است؛ یعنی اگر  $a > b$  آنگاه  $a + c > b + c$ .

این خاصیت چی میگه؟

میگه آگه شما یه نامساوی داشته باشید، می تونید هر عدد دلخواهی رو به طرفین نامساوی اضافه کنید. آگه به طرفین نامساوی یه عدد دلخواه اضافه کنید جهت نامساوی تغییر نمی کنه. مثال:

$$2 < 5$$

این یه نابرابریه، حالا ما می تونیم به طرفین این نابرابری عددهای یکسان رو اضافه (یا کم) کنیم و مطمئن باشیم که جهت نابرابری تغییر نمی کنه:

$$2 + 100 < 5 + 100$$

$$۲ - ۳ < ۵ - ۳$$

$$۲ + ۰ < ۵ + ۰$$

خاصیت ۲ :

خاصیت ۲ : اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند  $c$  ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر  $a > b$  و  $c > 0$  آنگاه  $ac > bc$ .

خاصیت ۲ پی می‌گه؟

می‌گه آگه شما طرفین یه نامساوی رو در یه عدد مثبت ضرب کنید، جهت نامساوی تغییر نمی‌کنه.

نکته ای که خیلی خیلی باید بوش دقت کنید اینه که آگه طرفین رو در عدد مثبت ضرب کنیم جهت تغییر نمی‌کنه. آگه عدد منفی یا صفر رو در طرفین ضرب کنیم، این شرط برقرار نیست.

مثال:

$$4 < 7 \rightarrow 4 \times 5 < 7 \times 5 \rightarrow 20 < 35$$

$$4 < 7 \rightarrow 4 \times 10 < 7 \times 10 \rightarrow 40 < 70$$

$$4 < 7 \rightarrow 4 \times 2 < 7 \times 2 \rightarrow 8 < 14$$

همینطور که می‌بینید، بعد از ضرب طرفین در یک عدد مثبت جهت نامساوی تغییر نمی‌کنه.



خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری  $a > b$  را در عدد منفی  $c (c < 0)$  ضرب کنیم، در این صورت داریم:  $ac < bc$ .

این خاصیت برعکس خاصیت قبلیه، میگوید اگر طرفین نامساوی در یک عدد منفی ضرب بشود، جهت نامساوی عوض میشود.

$$4 < 7 \rightarrow 4 \times (-5) > 7 \times (-5) \rightarrow -20 > -35$$

$$4 < 7 \rightarrow 4 \times (-10) > 7 \times (-10) \rightarrow -40 > -70$$

$$4 < 7 \rightarrow 4 \times (-2) > 7 \times (-2) \rightarrow -8 > -14$$

این سه تا خاصیت رو خوب به خاطر بسپارید.

نامعادله یک مجهولی درجه اول:

به نابرابری گفته میشه که فقط شامل یک متغیره و درجه معادله نسبت به اون مجهول برابر ا هست.

مثال:

$$2x + 1 < 4$$

$$x - 1 > 2$$

$$3x + 1 < 5$$

در همه این نامساویها فقط یک مجهول داریم که  $x$  هست و درجه این جملات هم نسبت به  $x$  برابر ۱ هست.

مجموعه جواب نامعادله پیه؟

یعنی جوابهایی که در نامعادله صدق میکنند. مثلا:

$$a + 1 < 4$$

په عددهایی رو می‌تونیم به جای  $a$  قرار بدیم؟ همه عددهای کوچکتر از ۳ توی این نامساوی صدق میکنند

پس مجموعه جواب این نامعادله عددهای کوچکتر از ۳ هست.

**جوابهای نامعادله رو بطوری به دست بیاریم؟**

نامعادله رو مشابه روشی حل می‌کنیم که معادله رو حل می‌کردیم، فقط باید به فاصییت ۱ و ۲ و ۳ رو هم در نظر داشته باشیم.

مثال:

$$2x + 7 \geq 15$$

برای حل معادله، عددها رو به سمت می‌بردیم و متغیرها رو هم به سمت دیگه.

یادمون هم هست که وقتی به جمله، سمت دیگه میره علامتش عوض میشه. اینجا هم همین کار رو انجام میدیم:

$$2x \geq 15 - 7$$

$$2x \geq 8$$

توی معادله می‌گفتیم باید متغیر رو تنها بذاریم، یعنی باید ۲ رو از کنار  $x$  برداریم.  
 برای این کار باید طرفین رو در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنیم. با توجه به فاصیبت شماره ۲، وقتی  
 طرفین در عدد مثبت ضرب میشن، جهت نامساوی تغییر نمی‌کنه:

$$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times 8$$

بنابراین:

$$x \geq 4$$

پند تا مثال حل کنیم:

حل تمرین صفحه ۹۳

نابرابریها و نامعادله‌ها

۱- در جاهای خالی نمادهای  $<$  یا  $>$  را جایگزین کنید.

(الف)  $a-b=1$  است. در این صورت  $a \square b$ . (ج) اگر  $2(p-1)=2q-3$ ، در این صورت  $p \square q$ .  
 (ب) اگر  $u-v=-2$ ، در این صورت  $u \square v$ . (د) اگر  $\frac{a-b}{4}=-3$ ، در این صورت  $a \square b$ .

قسمت الف:

بهتره که هر کدوم از طرف رو یک طرف تساوی بگیریم که راحتتر بتونیم مقایسه رو انجام  
 بدیم:

$$a - b = 1 \rightarrow a = b + 1$$

الان  $a$  تنهاست و  $b$  با  $y$  عدد دیگر جمع شده، طبق توضیحاتی که در درس گفتیم  $a$  از  $b$  بزرگتره.

قسمت ب:

$$u - v = -2 \rightarrow u = v - 2$$

$$u + 2 = v$$

$v$  به تنهایی به طرف تساوی و  $u$  با  $y$  عدد دیگر جمع شده، بنابراین  $v$  بزرگتر از  $u$  هست.

قسمت ج:

$$2(p - 1) = 2q - 3$$

تا جایی که می‌تونیم ساده می‌کنیم:

$$2p - 2 = 2q - 3 \rightarrow 2p + 1 = 2q$$

اینجا  $2p$  به طرف تنهاست و  $2q$  با  $y$  عدد دیگر جمع شده، پس یعنی  $2q$  از  $2p$  بزرگتره. بنابراین:

$$2q > 2p$$

فاصلیت ۲ نامساویها به ما میگفت که می‌تونیم طرفین به نامساوی رو در  $y$  عدد مثبت ضرب کنیم، بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کنه. در اینجا ما میایم طرفین این نامساوی رو در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \times 2q > \frac{1}{2} \times 2p \rightarrow q > p$$

قسمت د :

$$\frac{a-b}{2} = -3$$

ساده می‌کنیم:

$$a-b = -6$$

و به اینصورت می‌نویسیم:

$$a+6 = b$$

a تنه‌است ولی b با 6 جمع شده، پس b از a بزرگ‌تره.

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $2(x-3)+5 < 5-x$

ج)  $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

ب)  $3-2x \geq 5(3-2x)$

د)  $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

قسمت الف:

اول ۲ رو در پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$2x - 6 + 5 < 5 - x$$

حالا همه متغیرها رو به سمت می‌ذاریم و همه عددها رو به سمت دیگه، توجه داشته باشید که هر عدد یا متغیری که بفواد به سمت دیگه بره، حتما علامتش عوض میشه:

$$2x + x < 5 + 6 - 5$$

$$3x < 6$$

یکی از خاصیت‌های نامساویها این بود که می‌توانستیم به عدد مثبت رو در طرفین نامساوی ضرب کنیم بدون اینکه علامت نامساوی عوض شه

در اینجا هم طرفین نامساوی رو در  $\frac{1}{3}$  ضرب می‌کنیم تا  $x$  تنها بمونه:

$$\frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 6$$

بنابراین:

$$x < 2$$

قسمت ب:

ابتدا ۵ رو در پرانتز ضرب می‌کنیم، بعد متغیرها رو به سمت می‌پریم و اعداد رو به سمت دیگه:

$$3 - 2x \geq 15 - 10x$$

$$-2x + 10x \geq 15 - 3$$

$$8x \geq 12$$

طرفین رو در  $\frac{1}{8}$  ضرب می‌کنیم تا  $x$  تنها بمونه:

$$\frac{1}{8} \times 8x \geq \frac{1}{8} \times 12$$

$$x \geq \frac{12}{8}$$

قسمت ج:

اول مخرج مشترک می‌گیریم، بعد از اینکه مخرجها برابر شدن، بدون توجه به مخرجها سوال رو حل می‌کنیم:

$$\frac{y-3}{4} - \frac{4}{4} > \frac{2y}{4}$$

حالا که مفرجهای یکسان شدن، دیگه باهاشون کاری نداریم و نامعادله رو بدون مفرج می‌نویسیم:

$$y - 3 - 4 > 2y$$

حالا متغیرها رو به سمت و عددها رو به سمت دیگه می‌بریم:

$$y - 2y > +3 + 4$$

$$-y > 7$$

حالا باید منفی کنار  $y$  رو برداریم تا  $y$  تنها بمونه. آگه طرفین رو در  $-1$  ضرب کنیم  $y$  تنها میشه. اما نکته خیلی خیلی مهمی که باید بهوش دقت کنیم اینه که وقتی نامساوی رو در  $y$  عدد منفی ضرب می‌کنیم حتما باید جهت نامساوی رو عوض کنیم:

$$(-1)(-y) < (-1)7$$

$$y < -7$$

قسمت >:

اینجا هم چون کسر داریم، اول مفرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{-24}{12} - \frac{3q}{12} \leq \frac{4(1+q)}{12}$$

حالا که مفرجهای یکسان شدن، دیگه نمی‌نویسیمشون:

$$-24 - 3q \leq 4(1+q)$$

$4$  رو در پرانتز ضرب می‌کنیم، بعد متغیرهای  $y$  رو به سمت و عددها رو به سمت دیگه می‌بریم:

$$-24 - 3q \leq 4 + 4q$$

$$-4q - 3q \leq 4 + 24$$

$$-7q \leq 28$$

برای اینکه  $q$  تنها بگونه باید طرفین رو در  $-\frac{1}{7}$  ضرب کنیم. اما توجه داشته باشید، چون طرفین رو در یک عدد منفی ضرب می‌کنیم باید جهت نامساوی رو برعکس کنیم:

$$\left(-\frac{1}{7}\right)(-7q) \geq \left(-\frac{1}{7}\right)28$$

$$q \geq -4$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

[www.riazibaham.ir](http://www.riazibaham.ir)

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.